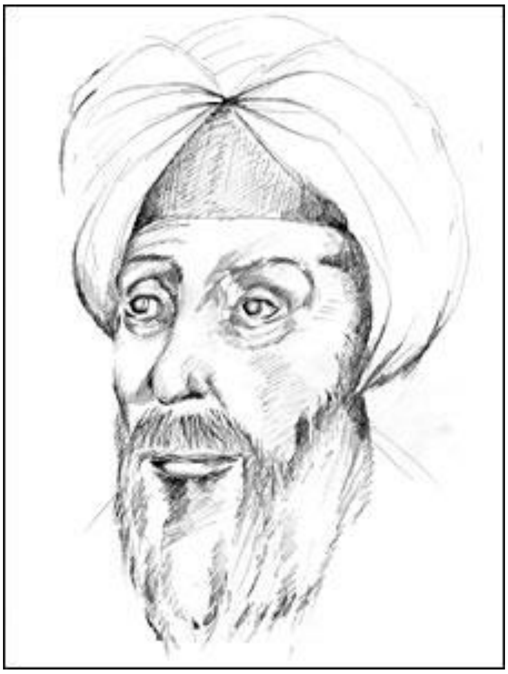
Carlo Felice Manara

SUL PROBLEMA DETTO "DI ALHAZEN".

1 – Nella Rivista "L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate", Vol. 218, agosto 1998, pag.390, nella Rubrica "I quesiti del Dr. Dubius", è comparso il seguente Quesito 98.16:
«Si può costruire, con riga e compasso, nel modo dovuto, la traiettoria di una palla da biliardo su un biliardo circolare? Più precisamente, è possibile costruire la traiettoria *AMB* che collega due punti di un disco, tale che *M* si trovi sul circolo che lo delimita, e tale che la traiettoria obbedisca alle leggi della riflessione?» (*)



Alla pagina citata si dice che i quesiti riportati sono presi dal "Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'enseignement publique", N.415 [aprile-maggio 1998].
Il Quesito 98.16 è classico e si trova citato nei trattati di storia come "Problema di Alhazen", dal nome del matematico arabo (**) Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan, ibn al-Haitham [ca.965- ca.1039], il cui nome è stato deformato in "Alhazen" dai traduttori della sua "Ottica". Sotto il nome di "Problema di Alhazen" il quesito si trova ricordato anche nel volume di Heinrich Dörrie dal titolo: «Triumph der Mathematik. Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur» [Würzburg, 1958]; il libro è stato tradotto in inglese da David Antin col titolo: «100 great problems of elementary Mathematics. Their history and solution.» [New York (Dover Pub.), 1965].
L'Autore ricorda anche che vari noti matematici si sono occupati del problema nei secoli scorsi; tra gli altri Huygens, Barrow, de l'Hôpital, Riccati e Quételet. Nel Volume citato lo stesso problema viene ricondotto alla ricerca delle intersezioni di una circonferenza e di un'iperbole equilatera passante per il centro della circonferenza stessa.

2 - Ben poche cose si potrebbero aggiungere di fronte all'autorità dei matematici citati. Riteniamo tuttavia non del tutto inutile fare qualche osservazione complementare alle soluzioni già ricordate.
Infatti, quando lo si traduca con gli strumenti della geometria analitica, il problema viene ricondotto come si è già detto alla ricerca delle intersezioni tra una circonferenza ed una iperbole equilatera; e quindi si riconduce alla soluzione di un'equazione algebrica che è in generale di IV grado. Ed a questo proposito si pongono ulteriori problemi che possono avere qualche interesse. Qui ci limiteremo a prendere in considerazione i due problemi seguenti: anzitutto ci si può domandare se ed a quali condizioni il problema

di IV grado abbia radici reali; ed in secondo luogo ci si può domandare se le soluzioni geometriche possano essere costruite con gli strumenti elementari [riga e compasso], come viene richiesto dal quesito da cui siamo partiti.

Per quanto riguarda il primo problema la risposta appare abbastanza facile, quando si osservi che l'iperbole equilatera di cui si è detto passa per il centro della circonferenza; e ciò basta per garantire che esistono in ogni caso almeno due soluzioni reali del problema; e ciò perché ovviamente almeno uno dei rami dell'iperbole ha un punto interno alla circonferenza. È poi facile immaginare qualche situazione particolare in cui le soluzioni reali del problema sono quattro: tale è per esempio la situazione in cui i due punti *A* e *B* [ricordati nell'enunciato] siano simmetrici rispetto al centro della circonferenza. E quindi ciò avviene anche per situazioni abbastanza vicine a quella or ora descritta.

Per rispondere al secondo problema, cioè quello della costruibilità delle soluzioni con strumenti elementari [riga e compasso], può essere istruttiva una ulteriore analisi, che è resa possibile dall'impiego delle procedure della geometria algebrica classica.

A tal fine fissiamo nel piano un riferimento ortogonale *Oxy*, e poniamo che siano:

(1) a_1, a_2 le coordinate di *A*, b_1, b_2 le coordinate di *B*.

Indichiamo poi con

(2) $m(OM)$, $m(AM)$, $m(BM)$

i coefficienti angolari delle rette *OM, AM, BM* rispettivamente.

Indicate genericamente con *x*, *y* le coordinate di *M*, si ha:

$$(3)\quad m(OM) = \frac{y}{x}\ ;\ m\,(AM) = \frac{y-a_2}{x-a_1}\ ;\ m\,(BM) = \frac{y-b_2}{x-b_1}.$$

La condizione che la retta *OM* sia bisettrice dell'angolo formato da *AM* e *BM* viene espressa dalla relazione:

$$(4)\quad \tan AMO + \tan BMO = 0.$$

Le formule elementari della trigonometria conducono ora a scrivere:

$$(5)\quad \tan AMO = \frac{m(OM) - m(AM)}{1 + m(OM)\,m(AM)}\ ,\ \tan BMO = \frac{m(OM) - m(BM)}{1 + m(OM)\,m(BM)}\ .$$

Sostituendo nella (4) le espressioni fornite dalle (3) e (5) si ottiene l'equazione cartesiana del luogo dei punti *M* soddisfacenti la condizione (4), tali cioè che la retta *OM* sia bisettrice dell'angolo formato dalle *AM* e *BM*.

Per rappresentare comodamente tale luogo, poniamo:

$$(6)\quad \sigma^2 = x^2 + y^2\ ,$$

ed anche:

$$(7)\quad F(x,y) = a_1 x + a_2 y\ ;\ F_0(x,y) = a_2 x - a_1 y\ ;\ G(x,y) = b_1 x + b_2 y\ ;\ G_0(x,y) = b_2 x - b_1 y\ .$$

Con queste posizioni la relazione cercata viene espressa nella forma:

$$(8)\quad \sigma^2\,(F_0 + G_0) - (F\,G_0 + G\,F_0) = 0.$$

Sviluppando i calcoli (che non offrono alcuna difficoltà concettuale), si giunge alla conclusione che la (8) rappresenta una cubica che passa per i punti ciclici del piano [ossia una cubica "circolare", secondo una denominazione convenzionale classica] e presenta nell'origine un nodo, le cui tangenti principali sono perpendicolari tra loro. La conica degenere, costituita dalla coppia delle tangenti in parola, è rappresentata dall'equazione:

$$(9)\quad F\,G_0 + G\,F_0 = 0.$$

Eseguendo le sostituzioni per le (7), la (9) assume la forma:

$$(10)\quad (a_1b_2 + a_2b_1)\,x^2 + \ 2xy\,(a_2b_2 - a_1b_1) - (\,a_1b_2 + a_2b_1)\,y^2.$$

3 - Per formulare algebricamente il problema di Alhazen con le convenzioni adottate, possiamo sempre supporre che la circonferenza di centro *O* sia rappresentata dall'equazione:

$$(11)\quad x^2 + \ y^2 = 1.$$

Pertanto le soluzioni del problema risultano fornite dalla soluzione del sistema costituito dalle equazioni (11) e (8). Due tra le 3·2 = 6 soluzioni del sistema sono ovviamente fornite dai punti ciclici del piano; le altre sono fornite dal sistema formato dalla (11) e dalla:

$$(12)\quad (F_0 + \,G_0\,) \,- (\,F\,G_0 + G\,F_0) = 0\,.$$

Tenendo conto delle (7) e della (10) si verifica facilmente che la (12) rappresenta una iperbole equilatera passante per l'origine.
Siamo ora in grado di impostare la procedura per rispondere al secondo quesito formulato poco sopra, cioè siamo in grado di indagare se le soluzioni del problema siano costruibili elementarmente, ossia con l'impiego degli strumenti elementari: riga e compasso.
A questo proposito ricordiamo che, come è ben noto, le soluzioni di un problema geometrico risultano costruibili in questo modo se e soltanto se le soluzioni del corrispondente problema algebrico appartengono al campo di razionalità generato dai dati, oppure ad una sua estensione algebrica ottenuta esclusivamente con l'impiego di radicali quadratici [cioè ad una estensione che viene talvolta chiamata "euclidea"].
È noto che le soluzioni di una equazione di IV grado si ottengono in funzione dei coefficienti mediante radicali quadratici e cubici; questi ultimi intervengono nella soluzione della risolvente cubica dell'equazione di IV grado. Segue di qui che le soluzioni di una equazione di IV grado appartengono ad una estensione euclidea del campo di razionalità generato dai coefficienti se e soltanto se la risolvente cubica della equazione stessa ha le sue radici appartenenti ad una estensione euclidea del campo di razionalità dei suoi coefficienti. E ciò avviene se e soltanto se l'equazione cubica ha una delle sue radici appartenenti al campo di razionalità dei suoi coefficienti.
Possiamo ora applicare questi risultati teorici al nostro problema, osservando che in questo caso i dati sono ovviamente le coordinate dei punti *A* e *B*. In questo caso l'interpretazione geometrica dei calcoli permette di semplificare le procedure per determinare se il problema di Alhazen sia in generale risolubile con riga e compasso. È infatti possibile dimostrare che la scrittura della risolvente cubica di una equazione di IV grado può essere ricondotta alla ricerca delle coniche degeneri di un fascio di coniche. Nel nostro caso le coniche sarebbero quelle rappresentate dalle (11) e (12).
Osserviamo infine che se si riesce a scegliere i dati in modo che risulti impossibile la ricerca elementare delle coniche degeneri del fascio risulterà

con ciò stesso garantita la impossibilità della costruzione elementare della soluzione generale del problema di Alhazen; ciò non esclude tuttavia che tali soluzioni siano costruibili elementarmente in una infinità di casi particolari.

4 - Per ottenere lo scopo che abbiamo in vista scegliamo quindi i punti A e B con opportune coordinate; precisamente poniamo:

(13) $a_1 = 1/2, \quad a_2 = -1/3, \quad b_1 = 1/4, \quad b_2 = 1/6.$

Con queste scelte i punti A e B risultano ovviamente interni alla circonferenza (11), e l'iperbole (12) risulta rappresentata dall'equazione:

(14) $13xy - 6x - 27y = 0.$

Possiamo quindi considerare il fascio delle coniche rappresentate dall'equazione:

(15) $t\,(x^2+y^2-1)+2(13\,xy-6x-27\,y)=0.$

La ricerca delle coniche degeneri del fascio (15) conduce a risolvere l'equazione cubica data da:

(16) $\begin{vmatrix} t & 13 & -6 \\ 13 & t & -27 \\ -6 & -27 & -t \end{vmatrix} = 0,$

ossia:

(17) $t^3+596\,t-4212=0.$

Si può ora verificare che la (17) non possiede alcuna radice appartenente al campo razionale, e quindi [in conseguenza di ciò che è stato ricordato] non possiede alcuna radice che appartenga ad una estensione euclidea del campo razionale. Questo scopo si raggiunge con una procedura elementare ben nota; si osserva infatti che si ha:

(18) $596 = 2^2 \cdot 149 \quad ; \quad 4212 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 13;$

se esistesse un numero razionale radice della (17), potremmo esprimerlo nella forma:

(19) $t = \dfrac{m}{n},$

con m ed n interi e primi tra loro. Pertanto si avrebbe:

(20) $m^3 = 4n^2(81\cdot13\;n - 149\;m).$

Ma la (20) non può sussistere nelle ipotesi poste: infatti m non può essere dispari poiché il secondo membro della (20) è pari; se poi m è pari, allora deve essere dispari n, e tale risulta quindi anche il numero $81\cdot13\;n - 149\;m$. Ne seguirebbe che il primo membro della (20) conterrebbe un numero multiplo di 3 di fattori 2, mentre il secondo membro conterrebbe soltanto 2^2.

Tornando pertanto al quesito riportato al paragrafo 1, si può rispondere che non si può assegnare una procedura, valida per tutte le possibili coppie di punti A e B interni alla circonferenza, che conduca alla costruzione del punto M con strumenti elementari. Ma ciò non esclude che una procedura cosiffatta possa essere escogitata per coppie particolari, anche in numero infinito.

090898 R

NOTA. *Il libro citato riconduce il problema alla ricerca delle intersezioni di una circonferenza e di una iperbole equilatera passante per il suo centro, Quindi il mio lavoro si riduce all'aver dimostrato che il problema non è risolubile con strumenti elementari in generale.*
Si sono occupati del problema, oltre [ovviamente] ad Alhazen tra gli altri anche Huygens, Barrow, de l'Hôpital, Riccati e Quételet [pag. 197].

ALTRA PROCEDURA, con calcoli diretti, per applicare l'argomentazione di cui al paragrafo 3.

5 - Siano:

(1a) p e q le coordinate di A con $p^2 + q^2 \leq 1$,-1 e 0 le coordinate di B.

Posto:

(2a) $y = t(x + 1)$,

le coordinate di M sono fornite dalle note formule:

$$(3a) \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Con questi dati le (4) e (5) danno luogo all'equazione:

$$(4a) \quad (1+p)t^3 - 3q\, t^2 + (1-3p)t + q = 0.$$

Posto:

$$(5a) \quad p = 1/3 \quad ; \quad q = 2/3, \text{ si ottiene:}$$

$$(6a) \quad \frac{4}{3} t^3 - 2t^2 + \frac{2}{3} = 0.$$

Posto:

$$(7a) \quad t = \frac{1}{z}, \text{ si ottiene:}$$

$$(8a) \quad z^3 - 3z + 2 = 0.$$

Ora si constata che la (8a) non può avere una soluzione z che sia un numero razionale. Infatti se esistesse un numero razionale cosiffatto potremmo esprimerlo nella forma:

9a) $z = \frac{m}{n}$, con m ed n interi e primi tra loro;

e dalla (8a) si avrebbe:

$$(10a) \quad m^3 = n^2(3m - 2n);$$

l'impossibilità dalla validità della (10a) nelle ipotesi poste si dimostra con procedimento analogo a quello utilizzato nel paragrafo 4. Tuttavia si verifica su questo esempio che, per particolari valori di p e q, esistono infinite soluzioni razionali della (4a) e quindi infiniti problemi geometrici le cui soluzioni possono essere costruite con strumenti elementari. Per esempio, posto nella (4a):

$$(11a) \quad p = 1/2,$$

la stessa equazione ha le infinite radici:

$$(12a) \quad t = \pm 1 \quad ; \quad t = 2q.$$

OSS. Questa scelta di p corrisponde a considerare gli infiniti casi in cui il punto M sia un vertice di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza ed avente un vertice B in (-1,0).

090998 R

ALTRI CALCOLI SEMPLIFICATI IN CASI PARTICOLARI.

Dato il fascio di coniche:

(1b) $t(x^2 + y^2 - 1) + 2(xy + px + qy) = 0$,

la ricerca delle coniche degeneri conduce all'equazione:

(2b) $\begin{vmatrix} t & 1 & p \\ 1 & t & q \\ p & q & -t \end{vmatrix} = 0$,

ossia:

(3b) $t^3 + t(p^2 + q^2 - 1) - 2pq = 0$.

Ponendo:

(4b) $p = q = 1$

si ha ovviamente $t = 1$.

Ma fatto:

(5b) $p = 2$; $q = 1$

Si ha:

(6b) $t^3 + 4t - 4 = 0$.

Ponendo:

(7b) $t = \frac{m}{n}$, con m ed n interi e primi tra loro, la (6b) diventa:

(8b) $m^3 = n^2(n - m)$,

e la discussione procede nel solito modo, analizzando i soliti casi: n ed m dispari, m pari ed n dispari, m dispari ed n pari.

091098 R

NdR

(*) La soluzione al Quesito 98.16 compare in IMSI, 1999, Vol. 22, Feb., B.

Testo reimpaginato, settembre 2014

Note.

(**) Ibn al-Haitham, Abū ʿAlī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan

Enciclopedie on line

Ibn al-Haitham ⟨*... hàitḫam*⟩, Abū ʿAlī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan. - Fisico matematico e astronomo arabo (Bassora 965 circa - Il Cairo 1039). È lo *Alhazen* o *Avenatan* degli scrittori italiani del Medioevo e del Rinascimento, che dei suoi numerosi scritti di matematica, astronomia, medicina, filosofia e scienze esatte conobbero soprattutto l'opuscolo *De crepusculis et nubium ascensionibus* (Lisbona, 1542) e il trattato di ottica pubblicato col titolo *Opticae thesaurus* nel 1572. In questo è esposto un celebre problema, noto come *problema di Alhazen*: dato uno specchio sferico e una sorgente luminosa puntiforme, trovare il punto dello specchio in cui si riflette il raggio che perviene all'occhio di un osservatore. Tale problema fu risolto da Leonardo mediante un congegno meccanico, da Ch. Huygens per via geometrica e da A. G. Kästner per via analitica (si tratta di un problema di 4º grado).

Altre notizie in Rete ad esempio in

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Al-Haytham.html

http://news.bbc.co.uk/2/hi/7810846.stm